Herkansingstentamen Discrete Structuren

21 augustus 2000

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is het aantal punten gedeeld door 10, afgerond op gehele en halve waarden, met als maximum 10 (bij 98 punten of meer).
NB. Er gelden voor dit herkansingstentamen **geen vrijstellingen** op grond van behaalde toetsresultaten.

1. Beschouw de formule

$$(p \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r))$$

   a. Bewijs mbv. een waarheidstabel (truth table) dat deze formule een tautologie is.
   b. Geef een lineair geannoteerd bewijs voor deze formule.

2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in N$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = n(n+2)$$

3. Bewijs: het verschil van een rationaal getal en een irrationaal getal is irrationaal.

4. a. Wat is een invariant?

   b. Beschouw het volgende programmafragment (m, n zijn gehele getallen):

```
while  0 < n  do
   m := m + n
   n := m + n
   m := n - m
```

   Laat zien dat $2|(m+n)$ een invariant is.

5. G is een eindige ongerichte graaf.
   a. Wat is een Euler-circuit in G?
   b. Formuleer de stelling van Euler die aangeeft wanneer G een Euler-circuit heeft.

6. Geef een expliciete formule voor s_n, gegeven door

$$s_0 = 4$$
$$s_1 = 2$$
$$s_n = s_{n-1} + 3s_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 2$$

2.0.2.

7. Teken een logisch netwerk voor de functie XOR mbv.
   a. twee AND-poorten en een OR-poort;
   b. twee OR-poorten en een AND-poort.

8. a. Wanneer zijn twee verzamelingen even groot?
   b. Geef een voorbeeld van twee even grote verzamelingen X en Y met $X \neq Y$ en $X \subseteq Y$.

TABLE 1. Logical Equivalences

1.	$\neg\neg p \Longleftrightarrow p$	double negation
2a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$	commutative laws
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$	
c.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	
3a.	$[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	associative laws
b.	$[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	
4a.	$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	distributive laws
b.	$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	
5a.	$(p \vee p) \Longleftrightarrow p$	idempotent laws
b.	$(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$	
6a.	$(p \vee \mathbf{0}) \Longleftrightarrow p$	identity laws[1]
b.	$(p \vee \mathbf{1}) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
c.	$(p \wedge \mathbf{0}) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
d.	$(p \wedge \mathbf{1}) \Longleftrightarrow p$	
7a.	$(p \vee \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
b.	$(p \wedge \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
8a.	$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	DeMorgan laws
b.	$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
c.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$	
d.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	
9.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	contrapositive
10a.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$	implication
b.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
11a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	
12a.	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
13.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	equivalence
14.	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	exportation law
15.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{0}]$	reductio ad absurdum